26.02.2016

Έστω S σύνολο και $*: S \times S \to S$ πράξη επί του S.
Αν $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$
$(a_1 * a_2) * (\dots * a_i * \dots * a_n)$. Το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων τα οποία μπορούν να προκύψουν, από την πράξη $*$ στα στοιχεία $a_1, \dots, a_n$ είναι:

$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$. Ο αριθμός $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$: n-οστός αριθμός Catalan

Αριθμοί Catalan: $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 132$, ...
" Bell : $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 203$...

Θεώρημα: [Ο γενικός προσεταιριστικός Νόμος]

Έστω S: σύνολο και $*$ είναι μια προσεταιριστική πράξη επί του S. Αν $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$, τότε το στοιχείο $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

<u>Απόδειξη</u>: Με χρήση Αρχής Μαθηματικής Επαγωγής.

• Αν $n=1$ ή $n=2$, τότε ο ισχυρισμός είναι άμεσος

• Αν $n=3$, ο ισχυρισμός προκύπτει επειδή η $*$ είναι προσεταιριστική

• <u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: Ο ισχυρισμός είναι αληθής για πλήθος στοιχείων $k<n$

• Η γενική περίπτωση $k=n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ομαδοποιήσεις με χρήση παρενθέσεων.

$M=(a_1 * \dots * a_i) * (a_{i+1} * \dots * a_n)$, όπου $i<n$
$N=(a_1 * \dots * a_j) * (a_{j+1} * \dots * a_n)$, όπου $j<n$

και τα στοιχεία στις παρενθέσεις είναι μονοσήμαντα ορισμένα από την Επαγωγική Υπόθεση.

<u>Θ.δ.ο</u>: $M=N$

1) Αν $i=j$, τότε προφανώς: $M=N$
2) Έστω ότι $i\neq j$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i<j$.

Τότε
$$M=\overbrace{(a_1 * \dots * a_i)}^{x} * \overbrace{(a_{i+1} * \dots * a_j) * (a_{j+1} * \dots * a_n)}^{y \quad\quad z}$$
$$N=\underbrace{(a_1 * \dots * a_i)}_{x} * \underbrace{(a_{i+1} * \dots * a_j)}_{y} * \underbrace{(a_{j+1} * \dots * a_n)}_{z}$$

Από την Επαγωγική Υπόθεση τα x, y, z είναι μονοσήμαντα ορισμένα, και τότε από την προσεταιριστική ιδιότητα $M=N$.

Τότε $M=x*(y*z)$
$N=(x*y)*z$

Παράδειγμα: ① Έστω $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Στο $\mathbb{R}^{\geq 0}$ είναι ορισμένη η εξής πράξη: $\forall a, b \in \mathbb{R}^{\geq 0}: a * b = |a-b|$

① $a * b = |a-b| = |b-a| = b * a \Rightarrow$ η $*$ είναι μεταθετική

② $2 * (1 * 1) = 2 * |1-1| = 2 * 0 = |2-0| = |2| = 2$
$(2 * 1) * 1 = |2-1| * 1 = 1 * 1 = |1-1| = |0| = 0$ } δεν είναι προσεταιριστική

② Στο σύνολο $\mathbb{R}$ ορίζουμε πράξη: $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \oplus b = \frac{a+b}{2}$

Η $\oplus$ είναι μεταθετική, αλλά όχι προσεταιριστική.

③ Στο $\mathbb{R}^3$, η πράξη $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ εξωτερικού γινομένου δεν είναι μεταθετική, ούτε προσεταιριστική.

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3: \vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

Ταυτότητα Jacobi: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3: \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{x} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$

Αν S είναι ένα σύνολο με $|S| = 2$, τότε υπάρχουν:
- 8 μεταθετικές πράξεις επί του S
- 8 προσεταιριστικές πράξεις » » S

με $|S| = 3$ υπάρχουν:
- 729 μεταθετικές πράξεις επί του S
- 113 προσεταιριστικές » » » S

Πλήθος μεταθετικών πράξεων επί του S, όπου $|S| = n$ είναι $n^{\frac{n^2+n}{2}}$

Παράδειγμα:

Έστω X: τυχόν μη-κενό σύνολο.
$S(X) = \{f: X \to X \mid f: 1\text{-}1 \text{ κ' επί}\}$: σύνολο μεταθέσεων του X.
Μετάθεση του X καλούμε κάθε 1-1 κ' επί απεικόνιση $f: X \to X$.
Στο σύνολο $S(x)$ ορίζαμε πράξη: $f \circ g: X \to X$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$\circ: S(x) \times S(x) \to S(x)$
$(f, g) \mapsto f \circ g$: η σύνθεση των f, g.

Η πράξη $\circ$ είναι καλά ορισμένη, διότι η σύνθεση δυο 1-1 κ' επί απεικονίσεων είναι 1-1 και επί.

Επειδή η σύνθεση απεικονίσεων ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα, έπεται ότι η πράξη $\circ$ είναι προσεταιριστική.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η πράξη $\circ$ είναι μεταθετική $\Leftrightarrow$ $|X| \leq 2$

Απόδειξη: "$\Leftarrow$" • Αν $|X| = 1$, δηλαδή $X = \{a\}$. Τότε

$S(x) = \{Id_x\}$, όπου $Id_x(a) = a$ και προφανώς η πράξη $\circ$ επί του $S(x)$ είναι μεταθετική. • Αν $|X| = 2$, δηλαδή $X = \{a, b\}$. Τότε $Id_x \in S(x)$: $Id_x \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \end{cases}$

Η απεικόνιση $f: \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a \end{cases}$, είναι 1-1 και επί και άρα

$f \in S(X)$. Τότε: $S(X) = \{Id_X, f\}$ και προφανώς η πράξη $\circ$ είναι μεταθετική επί του $S(X)$

"$\Rightarrow$" Έστω ότι $|X| > 2$. Τότε υπάρχουν τρία διαφορετικά στοιχεία $a, b, c \in X$. Ορίζουμε απεικονίσεις $f, g : X \to X$ ως εξής:

$$f : \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \\ x \mapsto x, \ \forall x \in X, \ x \neq a,b,c \end{cases}$$

η f: είναι 1-1 κ' επί $\Rightarrow f \in S(X)$

$$g : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto c \\ c \mapsto b \\ x \mapsto x, \ \forall x \in X, \ x \neq a,b,c \end{cases}$$

η g: είναι 1-1 κ' επί $\Rightarrow g \in S(X)$

$$\left.\begin{aligned} (f \circ g)(a) &= f(g(a)) = f(a) = b \\ (g \circ f)(a) &= g(f(a)) = g(b) = c \end{aligned}\right| \Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$$

Άρα:

$|X| > 2 \Rightarrow$ η πράξη $\circ$ δεν είναι μεταθετική. Ισοδύναμα
Η πράξη $\circ$ είναι μεταθετική $\Rightarrow |X| \leq 2$

$X = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$
$f \in S(X) \Rightarrow X = \{f(a_1), f(a_2) \dots, f(a_n)\}$

$X = \{1, 2, 3\}$

$S(X) = \{i, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$

$$i = \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases} \qquad f_1 \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases} \qquad f_3 : \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \qquad f_5 : \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$$

Θεώρημα: [Ο ΓΕΝΙΚΟΣ ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ]

Έστω X είναι ένα σύνολο επί του οποίου έχει ορισθεί μια προσεταιριστική πράξη $*$. Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$, ώστε: $a_i * a_j = a_j * a_i$, όπου $1 \leq i, j \leq n$

Τότε: $a_1 * a_2 * \dots * a_n = a_{\sigma(1)} * a_{\sigma(2)} * \dots * a_{\sigma(n)}$,
$\forall \sigma$: μετάθεση στο $\{1, 2, \dots, n\}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΕΣ ΜΕ ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Έστω X, μη-κενό σύνολο και R: σχέση ισοδυναμίας επί του X. Υποθέτουμε ότι $*: X \times X \to X$ είναι μια πράξη επί του X.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: $\quad X/R = \{ [x]_R \subseteq X \mid x \in X \}$

$$[x]_R \tilde{*} [y]_R = [x * y]_R$$

Τότε η αντιστοιχία $\tilde{*} : X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \longrightarrow X/\mathcal{R}$

$$([x]_{\mathcal{R}}, [y]_{\mathcal{R}}) \longmapsto [x]_{\mathcal{R}} \tilde{*} [y]_{\mathcal{R}} = [x * y]_{\mathcal{R}}$$

είναι μια καλά ορισμένη πράξη επί του $X/\mathcal{R}$.

<u>Παράδειγμα:</u> Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής:

$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow |x| = |y|$

Τότε η $\mathcal{R}$ είναι μια σ. ισοδυναμίας επί του $\mathbb{R}$, και $\forall\, x \in \mathbb{R} : [x]_{\mathcal{R}} = \{x, -x\}$. Θεωρούμε την πράξη $+$ της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$

Τότε $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : [x]_{\mathcal{R}} \tilde{+} [y]_{\mathcal{R}} = [x+y]_{\mathcal{R}} \longrightarrow$ δεν είναι καλά ορισμένη πράξη επί του $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Για να είναι καλά ορισμένη η πράξη $\tilde{+}$, θα πρέπει: αν $[x]_{\mathcal{R}} = [x']_{\mathcal{R}}$ (*), τότε $[x]_{\mathcal{R}} \tilde{+} [y]_{\mathcal{R}} = [x'] \tilde{+} [y']_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow [x+y]_{\mathcal{R}} = [x'+y']_{\mathcal{R}}$

(*) $[y]_{\mathcal{R}} = [y']_{\mathcal{R}}$ (*)

$$\left.\begin{array}{l} 2 \sim_{\mathcal{R}} -2 \Rightarrow [2]_{\mathcal{R}} = [-2]_{\mathcal{R}} \\ 1 \sim_{\mathcal{R}} 1 \Rightarrow [1]_{\mathcal{R}} = [1]_{\mathcal{R}} \end{array}\right| \Rightarrow \text{θα πρέπει:}$$

$$[2]_{\mathcal{R}} \tilde{+} [1]_{\mathcal{R}} = [-2]_{\mathcal{R}} \tilde{+} [1]_{\mathcal{R}}.$$

$\Leftrightarrow [2+1]_{\mathcal{R}} = [-2+1]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow 3 \sim_{\mathcal{R}} -1 \Leftrightarrow |3| = |-1|$, άτοπο!

άρα η "πράξη" δεν είναι καλά ορισμένη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: αυτό ισχύει $\mapsto$

$$\forall\ x,y,z,w \in X: \left.\begin{array}{l} x \sim_{\mathcal{R}} z \\ x \sim_{\mathcal{R}} w \end{array}\right| \Rightarrow x*y \sim_{\mathcal{R}} z*w \quad (1)$$

Ισοδύναμα: $\left.\begin{array}{l} [x]_{\mathcal{R}} = [z]_{\mathcal{R}} \\ [y]_{\mathcal{R}} = [w]_{\mathcal{R}} \end{array}\right| \Rightarrow [x*y]_{\mathcal{R}} = [z*w]_{\mathcal{R}}$

Ισοδύναμα: $\left.\begin{array}{l} [x]_{\mathcal{R}} = [z]_{\mathcal{R}} \\ [y]_{\mathcal{R}} = [w]_{\mathcal{R}} \end{array}\right| \Rightarrow [x]_{\mathcal{R}} \,\tilde{*}\, [y]_{\mathcal{R}} = [z]_{\mathcal{R}} \,\tilde{*}\, [w]_{\mathcal{R}}$

Ορισμός: Η πράξη $*$, καλείται συμβιβαστή με τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ αν ικανοποιείται η σχέση (1)

Πρόταση: Έστω $\mathcal{R}$ σχέση ισοδυναμίας επί ενός συνόλου X, και $*$ είναι μια πράξη επί του X, η οποία είναι συμβιβαστή με την $\mathcal{R}$. Τότε η πράξη επί του X επάγει μια πράξη $\tilde{*}$ επί του $X/\mathcal{R}$ ως εξής: $[x]_{\mathcal{R}} \,\tilde{*}\, [y]_{\mathcal{R}} = [x*y]_{\mathcal{R}}$.

Επιπλέον: (1) Αν η $*$ επί του X είναι μεταθετική ή προσεταιριστική, τότε η πράξη $\tilde{*}$ επί του $X/\mathcal{R}$ είναι μεταθετική ή προσεταιριστική.

(2) Αν υπάρχει $e \in X: e*x = x*e = x,\ \forall x \in X$, τότε $[e]_{\mathcal{R}} \,\tilde{*}\, [x]_{\mathcal{R}} = [x]_{\mathcal{R}} = [x]_{\mathcal{R}} \,\tilde{*}\, [e]_{\mathcal{R}}$

③ Αν $x \in X$ και υπάρχει $x' \in X : x \star x' = e = x' \star x$, όπου το e είναι όπως στο ②, τότε:
$[x]_{\mathcal{R}} \,\tilde{\star}\, [x'] = [e]_{\mathcal{R}} = [x']_{\mathcal{R}} \,\tilde{\star}\, [x]_{\mathcal{R}}$.

<u>Παράδειγμα:</u>

① Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε την ακόλουθη σχέση $\mathcal{R}$
$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$
Η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι συμβιβαστή με την πράξη της πρόσθεσης, διότι αν: $\left.\begin{matrix} x \sim_{\mathcal{R}} z \\ y \sim_{\mathcal{R}} w \end{matrix}\right| \to \begin{matrix} x - z \in \mathbb{Z} \\ y - w \in \mathbb{Z} \end{matrix} \to x + y - z - w \in \mathbb{Z} \to$

$\to (x+y) - (z-w) \in \mathbb{Z} \to x + y \sim_{\mathcal{R}} z + w$. Έτσι ώστε μπορεί να εφαρμοστεί η ΠΡΟΤΑΣΗ. Όμως η πράξη του πολ/μού δεν είναι συμβιβαστή με τη σχέση ισοδ $\mathcal{R}$ διότι $1/2 \sim_{\mathcal{R}} 1/2$ Επειδή $1/2 \cdot 0 = 0 \nsim_{\mathcal{R}} 1/2 \cdot 1 = 1/2$. (διότι $0 - 1/2) \notin \mathbb{Z}$) η πράξη πολ/μού δεν είναι συμβιβαστή με την $\mathcal{R}$. #

② Αν $n \geq 1$, τότε θεωράμε τη σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{Z}$. $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \sim_{\mathcal{R}} b \Leftrightarrow n \mid a - b$ (Οι πράξεις πρόσθεσης κ' πολ/μού είναι συμβιβαστές με την $\mathcal{R}$)

Τότε: $\mathbb{Z}/_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$.

Άρα το σύνολο πηλίκο $\mathbb{Z}_n$ είναι εφοδιασμένο με πράξεις πρόσθεσης $\tilde{+}$ και πολ/μού $\tilde{\cdot}$, οι οποίες ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες που ικανοποιούν οι $+, \cdot$ στο $\mathbb{Z}$

• Αν X είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη $*$ και $S \subseteq X$, τότε θα λέμε ότι το S είναι κλειστό στην πράξη $* \iff \forall x,y \in S: x*y \in S$. Αν αυτό συμβαίνει, τότε προφανώς, δίνοντας

$*: S \times S \to S$ εισποιούμε μια πράξη επί του S

$(x,y) \mapsto x*y$. #

Έστω G ένα σύνολο, το οποίο είναι εφοδιασμένο με μια πράξη $*$.

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>: Αν $a,b \in G$ έχει η εξίσωση $a*x=b$ (μοναδική) λύση;

α) $G=\mathbb{Z}$, $*=+$	β) $a*x=b \Rightarrow$	γ) $G=\mathbb{Q}^*$, $*=\cdot$
$5+x=2$	$a'*(a*x)=b*a' \Rightarrow$	$2\cdot x=3$
$\Rightarrow -5+(5+x)=2-5$	$\Rightarrow (a'*a)*x=a'*b$	$\frac{1}{2}\cdot(2\cdot x)=\frac{1}{2}\cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=-3$	$\Rightarrow e*x=a'*b$	$(\frac{1}{2}\cdot 2)\cdot x=3/2 \Rightarrow$
	$\Rightarrow x=a'*b$	$1\cdot x=3/2 \Rightarrow$
		$x=3/2$

(*) Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την ύπαρξη μοναδιαίου ουδέτερου στοιχείου και προσεταιριστικότητας, και ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου.

<u>Ορισμός</u>: Μια ομάδα είναι ένα ζεύγος $(G,*)$, όπου G: σύνολο και $*$ είναι μια πράξη επί το G, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

1) $\forall x,y,z \in G: x*(y*z)=(x*y)*z$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
2) $\exists e \in G: e*x=x=x*e$ (Το e καλείται ουδ. στοιχ ως προς την $*$) (Ύπαρξη ουδ. στοιχ.)
3) $\forall x \in G$, $\exists x' \in G: x*x'=e=x'*x$.

Το x' καλείται αντίστροφο στοιχείο (αντίθετο) του x ως προς την πράξη αστεράκι $*$

<u>Παρατήρηση</u>: Το ουδέτερο στοιχείο μιας ομάδας $(G, *)$ είναι μοναδικό.

Έστω ότι e' ουδέτερο στοιχείο. Δηλαδή
$e' * x = x = x * e'$, $\forall x \in G$

Θα έχουμε $\left.\begin{array}{l} e * e' = e' \\ e * e' = e \end{array}\right\} e = e'$ Άρα το ουδέτερο στοιχείο σε μια ομάδα, είναι μοναδικό

Τέλος, για το στοιχείο $x \in G$, έχουμε και ότι
$x * x'' = e = x'' * x$

$x * x'' = e \Rightarrow x' * (x * x'') = x' * e \Rightarrow (x' * x) * x'' = x' \Rightarrow$
$\Rightarrow e * x'' = x' \Rightarrow x'' = x'$. Άρα το αντίστροφο ενός στοιχείου σε μια ομάδα, είναι <u>μοναδικό</u>!